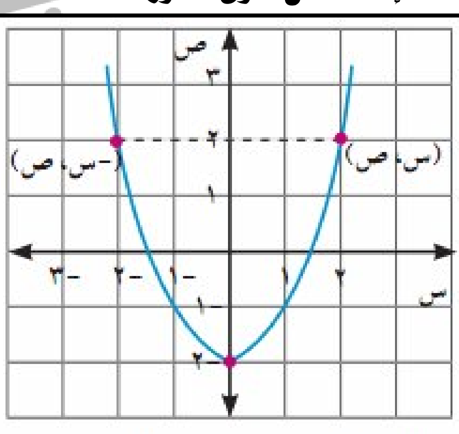
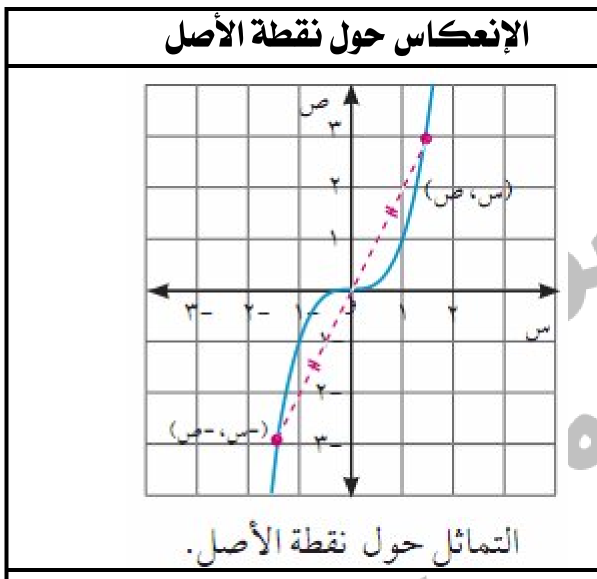
١ - ٢ بعض خواص الدوال

اولا: التماثل فى الدوال:

من دراستنا السابقة نعلم أن التماثل حول مستقيم يعنى انه يمكن طى الشكل عند المستقيم لينطبق نصفا المنحنى تماما وبعض الدوال يكون منحناها متماثلا حول محور الصادات والبعض الآخر يكون متماثلا حول نقطة الأصل وكثير من الدوال يكون منحناها غير متماثل حول الصادات او حول نقطة الأصل

الإنعكاس حول محور الصادات	الإنعكاس حول نقطة الأصل
 	
النقطة (ـس ، ص) الواقعه على منحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعه عليه ايضا بالإنعكاس حول محور الصادات كما هو موضح بالشكل	النقطة (ـس ، ـ ص) الواقعه على منحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعه عليه ايضا بالإنعكاس حول نقطة الأصل كما هو موضح بالشكل

ثانيا: الدوال الزوجية والدوال الفردية:

- الدالة د(س) تكون زوجية إذا كان:

د(ـس) = د(س)   لكل س ، ـ س ∈ مجال الدالة

منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلا حول محور الصادات

اى انه أذا كانت النقطة (س ، ص) ∈ لمنحنى الدالة فإن النقطة (ـس ، ص) ∈ لمنحنى الدالة أيضا

- الدالة د(س) تكون فردية إذا كان:

د(ـس) = ـد(س)   لكل س ، ـ س ∈ مجال الدالة

منحنى الدالة الفردية يكون متماثلا حول نقطة الأصل

اى انه أذا كانت النقطة (س ، ص) ∈ لمنحنى الدالة فإن النقطة (ـس ، ـ ص) ∈ لمنحنى الدالة أيضا

!خطوات بحث نوع الدالة هل هى زوجية أم فردية أم غير ذلك:

١) يجب التحقق من أن س ، — س تنتميان لمجال الدالة
وإذا لم يتحقق ذلك تكون الدالة ليست زوجية وليست فردية بدون إيجاد د(—س)
٢) نوجد د(—س) بوضع (— س) بدلا من كل (س) فى قاعدة الدالة
٣) نقارن بين الدالة الناتجة والدالة الأصلية:

فإذا كان د(—س) = د(س) وهذا معناه أن جميع الإشارات لم تتغير وبقيت قاعدة الدالة كما هى !
! تكون الدالة فى هذه الحالة زوجية

وإذا كان د(—س) = —د(س) وهذا معناه أن جميع الإشارات تغيرت بحيث إذا اخذنا الاشارة السالبة عامل مشترك تنتج قاعدة الدالة الأصلية
! تكون الدالة فى هذه الحالة فردية

إما إذا كان د(—س) ≠ د(س) ، د(—س) ≠ —د(س) وهذا معناه أن بعض الاشارات تغيرت وبعضها لم يتغير أى أن قاعدة الدالة لم تبقى كما هى وإذا أخذنا الاشارة السالبة عامل مشترك لن نحصل على قاعدة الدالة الأصلية
! تكون الدالة فى هذه الحالة لا زوجية ولا فردية

تذكر أن:

(— س)^عدد زوجي = س^نفس العدد الزوجي ، (— س)^عدد فردى = - س^نفس العدد الفردى

ملاحظة هامة : **أغلب الدوال ليست زوجية وليست فردية**

مثـــال (١):

بين نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك

١) د(س) = $س^٤ - ٥س^٢ + ٦$ ٢) د(س) = $س^٣ - س$ ٣) د(س) = $س^٢ + ٢س + ٣$

الحــــل:

١) ∵ د(س) = $س^٤ - ٥س^٢ + ٦$ ∴ مجال الدالة = ع
∴ لكل س ، — س ∋ ع يكون:
د(—س) = $(-س)^٤ - ٥(-س)^٢ + ٦ = س^٤ - ٥س^٢ + ٦$
أى أن د(—س) = د(س) !! الدالة زوجية !

لاحظ أن الاشارات لم تتغير وظلت قاعدة الدالة كماهى

٢) ∵ د(س) = $س^٣ - س$ ∴ مجال الدالة = ع
∴ لكل س ، — س ∋ ع يكون:

∴ د(ــس) = (ــس)^{٣} − (ــس) = ــس^{٣} + س

= ــ(س^{٣} − س)

أى أن د(ــس) = ــ د(س) !!!!!!!! ! الدالة فردية

لاحظ أن جميع الاشارات تغيرت وبعد أخذ (-) عامل مشترك نتجت قاعدة الدالة الأصلية

٣) ∵ د(س) = س^{٢} + ٢س + ٣   ∴ مجال الدالة = ع

∴ لكل س ، ــ س ∈ ع   يكون:

∴ د(ــس) = (ــس)^{٢} + ٢(ــس) + ٣

= س^{٢} − ٢س + ٣ ≠ د(س)

= ــ(ــس^{٢} + ٢س − ٣) ≠ ــد(س)

لاحظ أن بعض الاشارات تغير والبعض لم يتغير وبالتالى تغيرت قاعدة الدالة وبعد أخذ (-) عامل مشترك لم نحصل على قاعدة الدالة الأصلية

!!!أى أن د(ــس) ≠ د(س) !!!!!! د(ــس) ≠ ــ د(س)!!!!! ! الدالة ليست زوجية وليست فردية

ملاحظة هامة:

الدالة الحقيقية د(س) = أس^{ن} حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ ص$^{+}$ تسمى دالة القوى

وتكون الدالة زوجية إذا كانت ! زوجية و فردية إذا كانت ! ! فردية

مثـــال (٢):

بين نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك

١) د(س) = س^{٢}جاس + س

٢) د(س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$

٣) د(س) = ٤س^{٣} + ٥جتا٢س

٤) د(س) = $\frac{٥}{\text{س}^{٥}}$ + ٥ × ٥$^{\text{س}}$

الحـــل:

١) ∵ د(س) = س^{٢}جاس + س   ∴ مجال الدالة = ع   ∴ لكل س ، ــ س ∈ ع   يكون:

د(ــس) = (ــس)^{٢}جا(ــس) + (ــس) = س^{٢}×ــجاس − س

= ــس^{٢}جاس − س = ــ(س^{٢}جاس + س)

أى أن د(ــس) = ــ د(س) !!!!!!!! !! ! الدالة فردية

تذكر أن:
جا(ــس) = ــجاس
، جتا(ــس) = جتاس
، ظا(ــس) = ــظاس

٢) ∵ د(س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$ ∴ مجال الدالة = [ــ ٣ ، ∞ [

ونلاحظ مثلا أن ٥ ∈ [ــ ٣ ، ∞ [فى حين أن   ــ ٥ ∉ [ــ ٣ ، ∞ [

!!!!!! ! الدالة ليست زوجية وليست فردية

٣) ∵ د(س) = ٤س^٣ + ٥جتا ٢س ∴ مجال الدالة = ع

∴ لكل س ، – س ∈ ع يكون:

د(–س) = ٤(–س)^٣ + ٥جتا(–٢س) = –٤س^٤ + ٥جتا ٢س = –(٤س^٤ – ٥جتا ٢س)

!!!أى أن د(–س) ≠ د(س) !!!•!!! د(–س) ≠ – د(س)!!!!! ! الدالة ليست زوجية وليست فردية

٤) ∵ د(س) = ٥/٥^س + ٥ × ٥^س ∴ مجال الدالة = ع

∴ لكل س ، – س ∈ ع يكون:

د(–س) = ٥/٥^(–س) + ٥ × ٥^(–س) = ٥ × ٥^س + ٥/٥^س

= ٥/٥^س + ٥ × ٥^س

أى أن د(–س) = د(س) !!!!!! ! الدالة زوجية

تذكر أن:
أ^(–ن) = ١/أ^ن ، ١/أ^(–ن) = أ^ن

مثـــال (٣):

عين نوع الدالة د(س) = { ٢س : س ≥ ٠ ، – ٢س : س < ٠ }

من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واستنتج من الرسم مداها

الحـــل:

الدالة معرفة عند س ٠ حيث أن د(٠) = ٢ × ٠ = ٠

والدالة معرفة بقاعدتين حيث يختلف تعريف الدالة يمين ويسار س ٠

يتم إعادة كتابة قاعدة الدالة كما يلى:

د(س) = { ٢س : س > ٠ ، ٠ : س = ٠ ، – ٢س : س < ٠ }

لمعرفة نوع الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك نضع – س بدلا من كل س

وذلك لأن س ، – س ينتميان للمجال

∴ د(–س) = { ٢(–س) : (–س) > ٠ ، ٠ : (–س) = ٠ ، – ٢(–س) : (–س) < ٠ }

∴ د(–س) = { – ٢س : س < ٠ ، ٠ : س = ٠ ، ٢س : س > ٠ }

بضرب اطراف المتباينات وطرفى المتساوية × –١
مع ملاحظة أن المتباينات يتغير اتجاهها عند ضربها فى عدد سالب

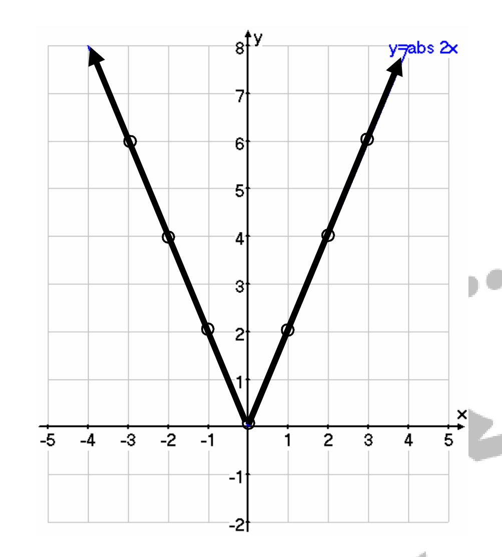
وبتبديل الصفين الأول والثالث

$$\therefore د(-س) = \begin{cases} ٢س & : س > ٠ \\ ٠ & : س = ٠ \\ -٢س & : س < ٠ \end{cases}$$

أى أن د(-س) = د(س) !!! !!!!!!!! الدالة زوجية

ولرسم الشكل البيانى للدالة نعوض عن س بعدة قيم ونحسب قيم د(س) المناظرة

س ∈] ٠ ، ∞ [				س ∈] -∞ ، ٠ [		
د(س) = ٢س				د(س) = -٢س		
س	٣	٢	١	a !!!	١-	٢-	٣-
د(س)	٦	٤	٢	a !!!	٢	٤	٦



ويتم رسم الشكل البيانى كما هو موضح بالشكل المجاور

من الرسم نـجد أن :-

- المدى] ٠ ، ∞ [
- المنحنى متماثل حول محور الصادات

أى أن الدالة زوجية

خواص هامة:

أولا: إذا كان كل من $د_١$ ، $د_٢$ دالة زوجية ، وكان كل من $ر_١$ ، $ر_٢$ دالة فردية فإن:

١) $د_١ + د_٢$ دالة زوجية ٢) $ر_١ + ر_٢$ دالة فردية

أى أن مجموع دالتين زوجيتين هو دالة زوجية ، ومجموع دالتين فرديتين هو دالة فردية

٣) $د_١ \times د_٢$ دالة زوجية ٤) $ر_١ \times ر_٢$ دالة زوجية

أى أن حاصل ضرب دالتين زوجيتين معا او فرديتين معا هو دالة زوجية

٥) $د_١ \times ر_٢$ أو $د_٢ \times ر_١$ دالة فردية

أى أن حاصل ضرب دالتين احدهما زوجية والأخرى فردية فهو دالة فردية

٦) $د_١ + ر_٢$ أو $د_٢ + ر_١$ دالة ليست زوجية وليست فردية

أى أن مجموع دالتين احدهما زوجية والأخرى فردية فهو دالة ليست زوجية وليست فردية

ثانيا: الدالة د(س) = أ جتا ن س هى دالة زوجية لجميع قيم ن ∈ ع

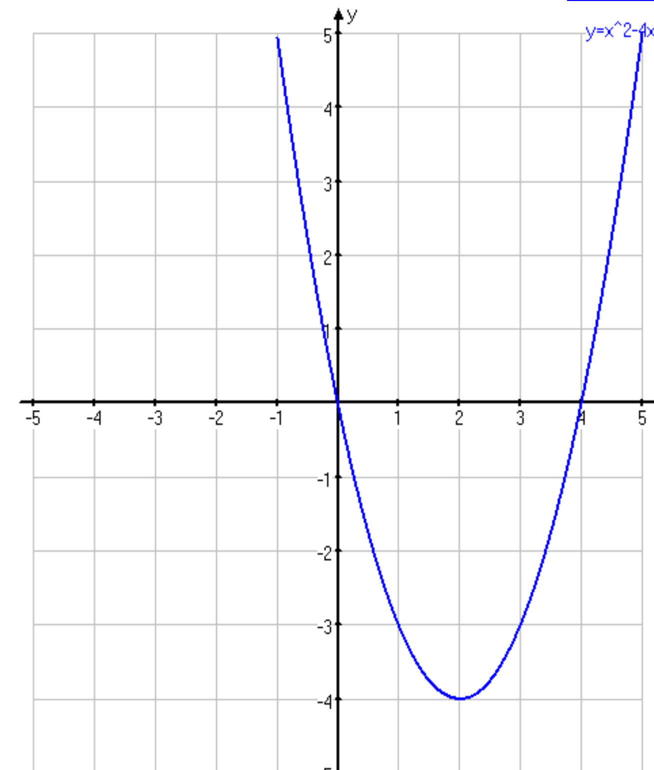
والدالة د(س) = أ جا ن س هى دالة فردية لجميع قيم ن ∈ ع

مثـــال (٤):

باستخدام أحد البرامج الرسومية مثل بيانيا الدوال الآتية وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك ثم تحقق من ذلك جبريا:

١) د(س) = س^{٢} – ٤س   ٢) د(س) = س^{٣} – س   ٣) د(س) = س جا٢س

الحـــل:



١) د(س) = س^{٢} – ٤س

المنحنى موضح بالشكل المجاور

ونلاحظ أن المنحنى غير متماثل حول محور الصادات

وغير متماثل حول نقطة الأصل

! الدالة ليست زوجية وليست فردية

التحقق جبريا:

∵ مجال الدالة = ع   ∴ س ، – س ∈ ع

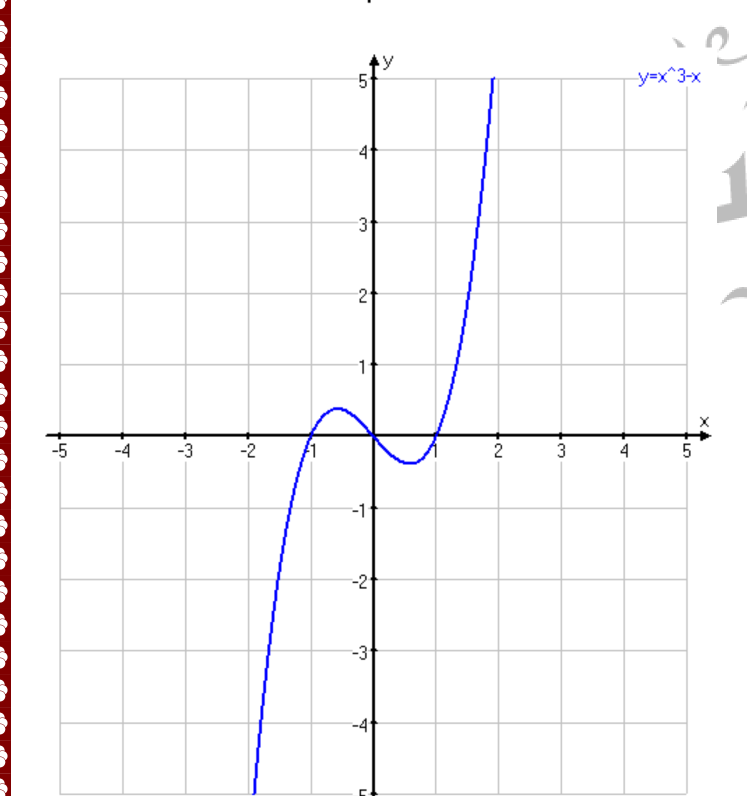
∴ د(–س) = (–س)^{٢} – ٤(–س)

= س^{٢} + ٤س

= –(–س^{٢} – ٤س)

∴ د(–س) ≠ د(س) !!•!! د(–س) ≠ – د(س)!

!! ! الدالة ليست زوجية وليست فردية



٢) د(س) = س^{٣} – س

المنحنى موضح بالشكل المجاور

ونلاحظ أن المنحنى متماثل حول نقطة الأصل

! الدالة فردية

التحقق جبريا:

∵ مجال الدالة = ع   ∴ س ، – س ∈ ع

∴ د(–س) = (–س)^{٣} – (–س)

= –س^{٣} + س

= –(س^{٣} – س)

∴ د(–س) = –د(س)

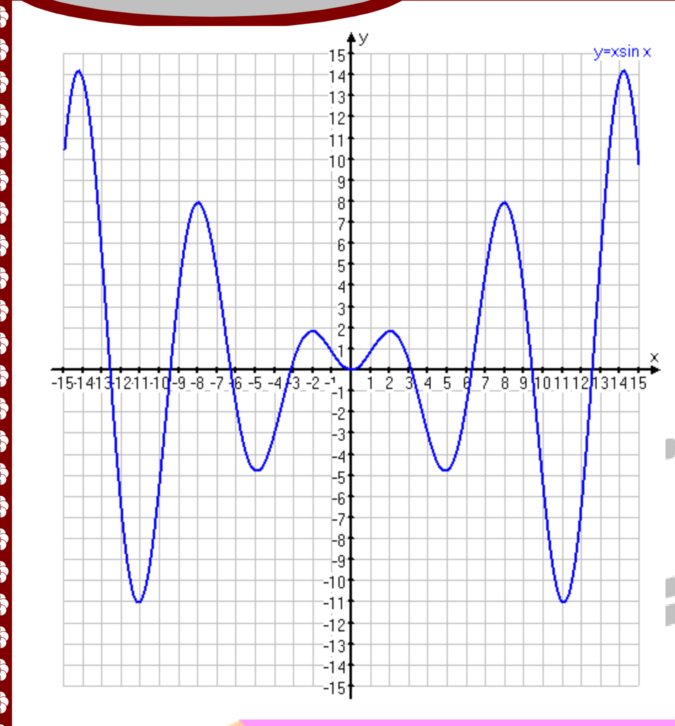
! الدالة فردية

٣) د(س) = س جا٢س

المنحنى موضح بالشكل المجاور

ونلاحظ أن المنحنى متماثل حول محور الصادات

! الدالة زوجية



التحقق جبريا:

∵ مجال الدالة = ع ∴ س ، ـ س ∈ ع

د(ـس) = (ـس) جا(ـ٢س)

= ـس × ـجا٢س = س جا٢س

∴ د(ـس) = د(س)

! الدالة زوجية

ثالثا: الدوال الأحادية :

الدالة د : س ← ص تسمى دالة أحادية إذا كان:

لكل أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب) فإن أ = ب

أو لكل أ ≠ ب فإن د(أ) ≠ د(ب)

خطوات معرفة الدالة أحادية أم لا:

١) نوجد د(أ) ، د(ب) ٢) نضع د(أ) = د(ب)

٣) بعد الحذف والتجميع والتبسيط اذا كانت النتيجة أن أ = ب كانت الدالة أحادية

واذا كانت النتيجة أن أ ≠ ب كانت الدالة ليست أحادية

اختبار الخط الأفقى:

- الدالة د : س ← ص تكون أحادية اذا كان الخط الأفقى (خط يوازى محور السينات) عند كل عنصر من عناصر المدى يقطع منحنى الدالة فى نقطة واحدة.

مثــــال (٥):

اثبت أن كلا من الدالتين د ، ر دالة أحادية :

١) د(س) = ٢س − ٣

٢) ر(س) = $\frac{\text{س}^3 - 5}{4\text{س} + 3}$

الحــــل:

١) د(س) = ٢س − ٣

لكل أ ، ب ∈ ع ∴ د(أ) = ٢أ − ٣ ، د(ب) = ٢ب − ٣

بوضع د(أ) = د(ب) ∴ ٢أ − ٣ = ٢ب − ٣ بحذف − ٣ من الطرفين

∴ ٢أ = ٢ب ⟸ ∴ أ = ب ⟸ ∴ د دالة أحادية

٢) ر(س) = (٣س − ٥) / (٤س + ٣)

لكل أ ، ب ∈ ع ر(أ) = (٣أ − ٥) / (٤أ + ٣) ، ر(ب) = (٣ب − ٥) / (٤ب + ٣)

بوضع ر(أ) = ر(ب)

∴ (٣أ − ٥) / (٤أ + ٣) = (٣ب − ٥) / (٤ب + ٣) ⟸ ∴ (٣أ − ٥)(٤ب + ٣) = (٤أ + ٣)(٣ب − ٥)

∴ ~~١٢أب~~ + ٩أ − ٢٠ب − ~~١٥~~ = ~~١٢أب~~ − ٢٠أ + ٩ب − ~~١٥~~ بالحذف والتبسيط

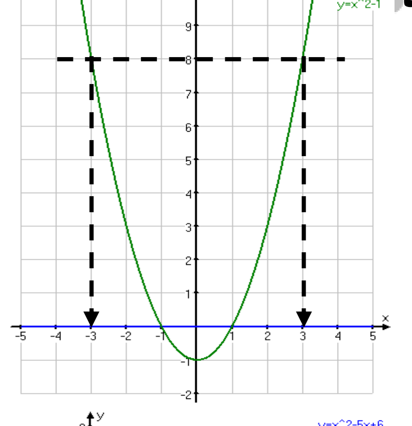
∴ ٢٩أ = ٢٩ب ⟸ ∴ أ = ب ⟸ ∴ ر دالة أحادية

مثال (٦):

بين أن كلا من الدالتين د ، ر ليست أحادية :

١) د(س) = س^{٢} − ١   ٢) ر(س) = س^{٢} − ٥س + ٦

الحل:



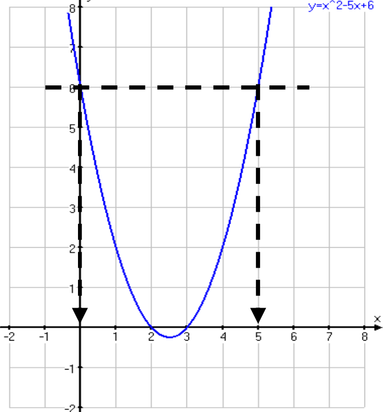
١) د(س) = س^{٢} − ١

∴ د(٣) = ٣^{٢} − ١ = ٨ ، ∴ د(−٣) = (−٣)^{٢} − ١ = ٨

∴ د(٣) = د(−٣) لكن ٣ ≠ −٣ ∴ د ليست أحادية

ونلاحظ أن الخط الأفقى عند ص = ٨ يقطع المنحنى فى نقطتين

أى انه يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما ٣ ، −٣



٢) ر(س) = س^{٢} − ٥س + ٦

ر(٠) = ٠^{٢} − ٠ + ٦ = ٦ ، ر(٥) = ٥^{٢} − ٥ × ٥ + ٦ = ٦

∴ د(٠) = د(٥) لكن ٠ ≠ ٥ ∴ ر ليست أحادية

ونلاحظ أن الخط الأفقى عند ص = ٥ يقطع المنحنى فى نقطتين

أى انه يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما ٠ ، ٥